Des catégories aux types : un itinéraire en mathématiques appliquées

P. Boldini
Université Paris IV — CAMS-EHESS

Séminaire Maths/Musique de l'IRCAM
18 novembre 2006

> "I realize that workers in category theory are so at home in their subject that they find it more natural to think in categorical rather than set-theoretical terms, but I would liken this to not needing to hear, one has learned to compose music."
> (Ferferman [1977], p. 153)

Comme indiqué dans le titre et plus ou moins convenu avec Moreno Andreatta, cet exposé prend la forme pompeuse d'une biographie intellectuelle, plutôt que d'un exposé scientifique ou philosophique, même si les commentaires à caractère philosophique ne manqueront pas. Je ne peux pas faire mieux dans ce cadre, mais j'espère que cela pourra intéresser certains auditeurs qui sont engagés dans une approche d'application des concepts mathématiques, car c'est exactement cette attitude qui est, et a été la mienne vis à vis de la Logique et de la Théorie des Catégories.

1 Préambule sociologique

Il ne s'agit pas pour moi de faire un état de l'art des rapports entre Théorie des Catégories et Logique, ni de présenter des travaux inédits dans ce domaine, mais simplement de livrer quelques réflexions d'un compagnon de route : quelqu'un qui a passé quelques années à essayer d'appliquer la Théorie des Catégories aux Sciences Humaines et à l'Informatique.

Dans ce genre d'exercice de nature épistémologique il me paraît très important d'indiquer d'où l'on parle, c'est-à-dire à partir de quelle position dans les champs scientifique et académique et à partir de quelle pratique. En d'autres termes pour que ce discours ait une quelconque chance d'être reçu et utile, il faut mettre toutes les cartes sur la table : expliciter si possible toute la relativité inhérente à mon point de vue.

1.1 Outsider

Les réflexions qui suivent sont celles d'un *outsider* à deux titres :

- du point de vue académique tout d'abord, je suis venu à la recherche universitaire sur le tard, après mon agrégation de mathématiques préparée en province à Bordeaux, j'ai enseigné en lycée, puis après un DEA de Mathématiques et Sciences Humaines au CAMS

de l'EHESS, j'ai eu l'opportunité d'être recruté et de faire une thèse dans un labo d'IA à l'ENST-Bretagne — une école d'ingénieurs.

- du point de vue scientifique aussi, puisque je n'ai pas travaillé *en* Théorie des Catégories, pas plus qu'en Logique, dans le sens où je n'ai pas produit de nouveaux concepts, systèmes, ou théorèmes. J'ai simplement cherché à comprendre et à appliquer.

1.2 Quelques banalités

On connaît la contradiction et les difficultés inhérentes à cette position, celle de l'*outsider* : on oscille entre le spectateur engagé et l'acteur dégagé. Comme dans tout jeu social, l'engagement dans le jeu scientifique doit être total si l'on veut atteindre les positions les plus hautes. Celui qui ne peut, pour diverses raisons, s'investir à ce point (cela dépend beaucoup ici de l'apprentissage, du capital scolaire et du milieu d'origine), est particulièrement sensible à tous les aspects arbitraires du jeu, et aussi le plus mal placé pour les critiquer ; dans le sens où sa critique, même si elle est juste, est disqualifiée par cette position, inférieure et dégagée.

2 Quelques étapes du parcours

Qui auront au moins le mérite d'offrir un panorama assez complet des domaines d'application de la théorie des catégories.

2.1 Les sciences cognitives, l'IA symbolique

L'histoire commence avec mon DEA de Mathématiques et Sciences Humaines à l'EHESS, on est en 1987, au début de la formation en France de ce milieu encore mal défini qui est celui des Sciences Cognitives. A cette époque balbutiante, les disciplines dominantes sont l'Informatique (IA), la Psychologie et la Linguistique, on est encore dans le symbolique et le représentationnel, mais on a quitté le chomskysme pour le cognitif au sens de la linguistique de Langacker [Langacker 1987], Lakoff [Lakoff 1987], etc. . . et leurs variantes françaises (avec le recul ce n'était pas forcément un progrès). Dans le milieu où je traîne, on s'intéresse à la théorie du prototype de Rosch [Rosch 1973].

On voit que l'on est encore dans le représentationnel, mais le virage vers le non-représentationnel, l'adptatif, le dynamique s'amorce (on est en train de passer des systèmes experts aux réseaux de neurones).

2.2 Prototypes et catégories

Pour revenir aux prototypes l'ambiance théorique était qu'il fallait abandonner, dans les sciences cognitives, la notion de concept pour celle de catégorie, celles-ci se constituant ou étant organisées autour de prototypes. Une question se posait naturellement : comment cette organisation déterminait le raisonnement le comportement logique, des sujets? Quelle était la logique de la catégorisation?

Je rapporte les choses dans mes termes de l'époque (mais ce n'était pas seulement les miens). J'ai évidemment un peu honte tellement c'est confus, naïf, empreint de psychologisme, mais c'était une époque assez stimulante aussi, parce que beaucoup de gens d'horizons divers

essayaient de faire quelque chose ensemble, et tentaient donc de s'approprier des cultures très différentes de leur milieu d'origine. On peut dire que j'y ai beaucoup et mal appris.

Mon futur directeur de thèse Jean-Pierre Barthélemy avait travaillé en collaboration avec des psychologues comme Danielle Dubois, sur des modèles de catégorisation par appariement à des prototypes en utilisant des mathématiques discrètes, des notions issues de la classification, diverses notions de similarité [Barthélemy 1991]. De mon côté j'apprenais la théorie des catégories en lisant le Lambek et Scott *Introduction to Higher Order Categorical Logic* [Lambek, Scott 1986], amené là par mes cours de DEA sur le lambda-calcul et la logique combinatoire à la Curry. Jean-Pierre Barthélemy qui avait fait sa thèse avec Charles Ehresmann sur la Théorie des Esquisses (comme René Guitart que vous recevez fréquemment) avait l'intuition qu'il fallait regarder du côté des catégories parce qu'elles sont une généralisation du point de vue ordonné (un ordre partiel est une catégorie avec beaucoup d'objets et peu de flèches, à l'opposé d'un groupe qui a un seul objet et beacoup de flèches) qui est adopté dans une approche assez en vogue en classification l'Analyse Formelle des Concepts par R. Wille [Wille 1982] (d'un tableau 0/1 représentant des objets décrits par des traits, on extrait un treillis de concepts définis comme rectangles maximums à réordonnement près des lignes et des colonnes, avec des belles correspondances de Galois,

$$Ext(A) \subset Ext(B) \Leftrightarrow Int(A) \supset Int(B)$$

qui sont un exemple de foncteurs adjoints, entre extensions et intensions de ces concepts).

3 Le travail de thèse

3.1 L'épistémologie génétique

Au début de la thèse je prends donc à bras le corps toutes ces idées, je me plonge dans la littérature, et je tombe sur l'ouvrage de Piaget *Morphismes et Catégories* [Piaget 1990]. Pour quelqu'un qui veut utiliser la Théorie des Catégories dans les sciences cognitives, il ne peut y avoir de meilleur encouragement que l'épistémologie génétique piagétienne : plus c'est mathématiquement abstrait, plus ça intervient tôt dans le développement psychologique! Piaget avait découvert quelque chose de plus abstrait que les groupes : les catégories et leurs morphismes! Certains de ses collaborateurs [Henriquès 1990] avaient essayé de modéliser les opérations d'assimilation, d'accomodation et les différents niveaux *intra/inter/trans*-morphiques en termes catégoriques.

J'ai emprunté leurs pas et élaboré un modèle de ce genre, un peu meilleur ?. D'un point de vue technique, je suis alors plutôt du côté esquisses/diagrammes que topoï : les schèmes sont des diagrammes ou des foncteurs sur une catégorie d'indices, l'assimilation c'est une limite inductive, l'accommodation une transformation naturelle etc... Tout cela donnera un petit article dans *Intellectica* [Boldini 1994].

TRANSPARENTS1

Ce travail inaugural, va me permettre de comprendre quelque chose qui deviendra de plus en plus évident par la suite, et que je trouverai explicitement formulé chez Wittgenstein : l'activité mathématique est une activité de détermination de concepts. Dans le cas des catégories cela veut dire que la théorie a déterminé de cette manière extrêmement précise, spécifique des mathématiques, des concepts que l'on retrouve plus ou moins bien explicités dans toutes les théories structurales, ce qui n'est évidemment pas étonnant de la part d'une approche structurale des mathématiques. L'activité de modélisation révèle donc l'architecture des théories en

question (ici psychologique, ou plus tard sociologique), améliore leur intelligibilité, ce qui est satisfaisant dans un premier temps, **mais ne fait rien de plus**.

Notons que Piaget, le dit explicitement, les morphismes sont les traces des transformations (les morphismes sont " transformables en leur forme, non transformants quant à leurs contenus"), mais dans les activités abstraites comme les mathématiques cela tend à se confondre.

3.2 La sociologie

De la même manière j'ai pu expérimenter l'intérêt et les limites de cette approche dans le domaine de la théorie sociologique : plus précisément la sociologie de Pierre Bourdieu. Les champs comme catégories, les relations d'homologies comme foncteurs, les caractéristiques des agents comme sections d'un pré-faisceau de traits, l'internalisation des contraintes structurales comme passage au faisceau engendré (germes, espace étalé, *sheafication*) etc...

TRANSPARENTS2 Mais je n'ai rien appris que je ne sache déjà en lisant les ouvrages de Bourdieu. En d'autres termes ce style de modélisation n'est pas assez dur. **On ne trouve pas d'impossibilité ou de contraintes**.

3.3 Les travaux de Andrée Ehresmann

Je dois souligner que ces travaux de modélisation structurale ont beaucoup profité de ceux menés par Andrée Ehresmann (qui était dans mon jury de thèse) dans le domaine de la biologie, où avec un collègue biologiste J-P Vanbremeersch elle propose des modèles fonctionnels du fonctionnement et de l'organisation biologique [Ehresmann, Vanbremeersch 1987].

3.4 Représentation informatique des connaissances

La nécessité de mener à bien une thèse étiquettée en Informatique, l'insatisfaction relative éprouvée dans ces travaux de modélisation structurale dont je sentais qu'ils pouvaient être multipliés à l'infini dans l'indifférence générale puisqu'ils n'apportaient rien à ce niveau de généralité dans la compréhension des phénomènes, sans négliger des limitations toutes personnelles qui m'ont fait me décourager assez vite dans l'entrepise intiale de dynamiser l'AFC de Wille (je n'arrivais pas à l'époque à trouver la bonne notion de foncteur entre tableaux 0/1 qui permettent aux treillis de concepts — au sens de tableaux maximaux de 1 — extraits des tableaux d'avoir de bonnes correspondances du genre conservation de la borne supérieure etc...ce que je regrette aujourd'hui car depuis j'ai appris que beaucoup de choses ont été faites autour de Michael Barr et Vaughan Pratt sur les espaces de Chu, et ici à Paris par Jean Bénabou sur les catégories de treillis) ont fait que je me suis dirigé vers des applications plus informatiques. Dans ce domaine on trouve plusieurs niveaux d'application de la théorie des catégories :

1. la sémantique de langages fonctionnels abstraits comme le lamba-calcul, le système F, etc...

2. la sémantique de vrais langages informatiques, CAML, HASKELL, où les instructions élémentaires sont interprétées par des constructions catégoriques exécutées sur des "machines catégoriques" abstraites,

3. la spécification fonctionnelle de logiciels (mes travaux (!) avec F. Bourdon)

4. la théorie des bases de données

Dans le premier cas on est du côté topoï/langage interne, dans les 2 suivants plus du côté diagramme/esquisse, et dans le dernier cas entre les deux.

Ma contribution dans ce domaine a été très modeste autour d'une idée assez simple : j'ai repris l'idée qu'un ensemble de connaissances est une base de données modélisée comme un foncteur d'une catégorie de taits vers une catégorie de domaines de valeurs, et rajouté aux opérations classiques de requête, ajout d'enregistrements, etc... une opération d'héritage modélisée par une fibration de Grothendieck — idée provenant de modèles catégoriques de théories des types comme le calcul des constructions de Huet et Coquand [Coquand, Gunter, Winskel 1989].

TRANSPARENTS3

Bref, j'ai fait ma petite salade et obtenu une drôle de thèse, qui ne m'a pas ouvert les portes des laboratoires d'informatique parisiens lorsque j'ai du quitter l'ENST-Bretagne. J'insiste sur cet aspect biographique, car comme celui mentionné au début, il est assurément très important pour mon évolution intellectuelle, et pour la bonne réception de ces propos.

3.5 Premières leçons

De ces quelques années de fréquentation de la théorie des catégories dans un objectif d'application, j'ai retiré quelques leçons :

1. tout d'abord il y a 2 styles de modélisation catégorique :

   (a) on applique la théorie des catgorie pure, en cherchant à comprendre des structures, ou des réalités décrites en termes structuraux, à l'aide des concepts dégagés par les catégoriciens (adjonction, limites, diagrammes, etc...)

   (b) soit on met des structures mathématiques usuelles, que l'on dynamise/localise à l'aide des idées autour de la théorie des topoï

2. dans le premier cas, on est dans l'approche structurale des mathématiques, il n'est pas surprenant que les concepts thématisés par cette théorie s'appliquent naturellement à toute théorie structurale ; mais on reste à ce niveau abstrait (les traces : je reviendrai plus loin sur le thème traces = spécification, thématisée en Info Théorique, et élaborée philosophiquement par Robert Brandom)

3. la deuxième approche tourne autour de la très belle idée thématisée par l'approche topoï : que l'on puisse éliminer les *a priori* logiques, pour récupérer une logique naturelle comme langage interne du topos.

   C'est assurément une très belle idée car elle thématise une conception très juste de la logique que j'ai trouvée merveilleusement exprimée plus tard par Robert Brandom dans son monumental *Making it explicit* : la fonction expressive de la logique, en d'autres termes le vocabulaire logique explicite le contenu implicite de nos pratiques (la logique comme organe de notre conscience sémantique).

   Donc une belle idée mais un peu abusive dans la pratique modélisatrice ; car c'est vraiment ce que j'ai essayé de faire en catégorisant l'AFC de Wille et en formalisant la représentation informatique des connaissances. Mais pour obtenir un langage interne un tant soit peu expressif, il faut mettre **explicitement** (c'est là où on est, une fois de

plus, dans l'interprétation d'une approche, ici l'approche brandomienne) dans la structure catégorique des structures qui internalisent, d'où des structures au moins comme les domaines de Scott pour internaliser l'implication ; bref on retrouve ce que l'on a mis au départ . Ccela fait écho à une remarque de Girard (*cf.* conf. ENS), sur la question des topologies sans-points (une question de Andreï Rodin), la théorie des locales : les catégoriciens font exprès de ne pas voir les points). En termes de la vulgate psychanalytique, je dirais que leur inconscient est ensembliste.

4. enfin, les catégoriciens sont devenus trop malins (comme dit encore Girard, *cf.* conf. ENS), ils peuvent tout catégoriser), je parle des virtuoses bien sûr, pas de moi, comme on l'a vu. Du coup ce n'est plus assez dur! Ils ne produisent pas de la contrainte, ils la caractérisent. On est toujours dans l'après-coup.

3.6 La Theory of Kinds de Macnamara et Reyes

L'étape décisive dans ce processus de détachement a été celle de ma découverte de *la Theory of Kinds* de Macnamara et Reyes, car à la fois elle atteignait un idéal dans la technicité et l'application (ce qui n'est pas étonnant puisqu'y collaborait un expert de la théorie des catégories), et endossait des conceptions que je ne partageais plus.

Exposée dans une série d'articles dans le *Notre Dame Journal of Formal Logics* et dans plusieurs chapitres du *The logical foundations of cognition* [Macnamara, Reyes 1994] (notons que Reyes est avec Makkai un des inventeurs de la logique catégorique *cf.* leur ouvrage de 1977 [Makkai, Reyes 1977]), la *Theory of Kinds* est une théorie référentielle de la signification, formalisée en termes catégoriques pour prendre en compte le fait indéniable qu'il n'y a pas d'entités individuelles *tout court*, pas de *bare particulars*, mais toujours des entités typées.

3.6.1 Un aperçu de la théorie (en anglais!)

The basic construction underlying the *Theory of Kinds* is a geometric morphism,

$$\mathsf{Sets} \underset{\Delta}{\overset{\Gamma}{\leftrightarrows}} \mathsf{Sets}^{\mathsf{P}^{op}}$$

between the toposes Sets and $\mathsf{Sets}^{\mathsf{P}^{op}}$ where P is a partially ordered sets of possible situations.

The introduction of such a set of situations is motivated by the *situation semantics* of Barwise and Perry ([Barwise, Perry 1983]). The partial order over P express the informational content of a situation, namely $V \leq U$ whenever V has more information than U. We can say that $\mathsf{Sets}^{\mathsf{P}^{op}}$ is a universe of variable sets whereas Sets may be thought as a universe of constant sets : the *kinds*.

We obtain a more explicit definition when considering[1] $\Gamma(\Omega)$ the set of downward closed subsets of P. A kind will be a couple $(A, \in_A)$ where A is a set and $\in_A$: $A \to \Gamma(\Omega)$ a map.

> "We think of kinds as interpretations of count nouns (CNs) such as "person", "dog", "animal". The interpretation of "dog", for instance, is the set DOG of all dogs that ever were, are or will be together with the map $\in_{DOG}$: $DOG \to \Gamma(\Omega)$. We think of $\in_{DOG}$ as the map that associates with a particular dog, say Freddie, the set of situations of which Freddie is a constituent."

[1] All these entities have a precise and natural meaning in the setting of topos theory. For a mathematician it is the most attractive feature of the *Theory of Kinds*.

Here is the main characteristic of the theory, as a theory of reference: the *modal constancy* of kinds. In front of these eternal kinds, the burden of change is supported by the situations which play a role similar to possible worlds in classical realistic theories.

The quotation illustrates the platonistic attitude which takes for granted an infinite set of situations without any precise criterion of indentity (not to talk of a process of construction!). Situations have no formal content, they are pure indexes.

If we put our constructionists requirements aside, we agree without difficulties to most of the theses of the authors on reference. There are six theses developed in [MacNamara, Reyes 1994] :

1. PNs refer rigidly.
2. Reference to an individual by means of a PN involves a kind.
3. Any reference to an individual involves a kind.
4. Kinds are modally constant.
5. Predicates of kinds and not kinds themselves are subject to change and modalities
6. All predicates are typed by kinds

There is no contradiction in such an agreement, reference is a *problem* for the anti-realist too. The only, but fundamental, difference is that reference is no more the key concept of the theory.

A consequence of the third thesis is that the relation among kinds cannot be set inclusion. A postulate of the form :

$$\texttt{a } A \texttt{ is a } B$$

is interpreted by a morphism $f : (A, \in_A) \to (B, \in_B)$ in the category of kinds. The morphism is a function $f : A \to B$ such that $\in_A(a) \subseteq \in_B(f(a))$ for all $a \in A$.

The intended meaning is that the postulate,

$$\texttt{a } BABY \texttt{ is a } PERSON$$

signifies that for every baby $b \in BABY$, the underlying person $f(b) \in PERSON$ appears in all the situations in which b appears. The notion of *underlying person* is a very interesting one, and our opinion is that it is not part of the spirit of a referential theory. A hint is given by the sophisticated construction[2] of an entity for a system of kinds. This construction is imposed by the referential *a priori* that demands that the person underlying the baby, and the animal underlying the person correspond to a unique entity.

We will see that the same idea appears much more naturally in the context of Type Theory.

Cette entreprise très sophistiquée s'est interrompue à la mort de John Macnamara. Techniquement très développée, elle montre précisément qu'on peut être catégoricien tout en conservant une conception fausse de la signification, et collaborer avec des partisants très traditionnels des théories psychologiques représentationnelles ; autant de choses auxquelles je ne croyais plus à l'époque.

[2]An entity will be an equivalent class for the equivalence relation generated by the identifications forced by the underlying maps. Therefore it is an ideal object.

4 Vers la théorie intuitionniste des types

4.1 Les preuves et leurs traces

Le dernier point des réflexions exprimées un peu plus haut, exprimé un peu trivialement en termes d'"après coup", est cependant parfaitement illustré me semble-t-il par l'important travail sur les théories des types auquel on a assisté depuis la fin des années 70.

Pour résumer cette histoire, on peut dire qu'on assiste à cette époque, avec des gens comme Martin-Löf et Girard, à un changement de paradigme. L'approche métamathématique des fondements à la Hilbert s'épuise, et apparaît une approche *directe* centrée autour d'une véritable théorie de la démonstration. Inutile de revenir sur l'énorme impact de ces théories sur l'informatique qui a culminé avec la découverte de l'isomorphisme de Curry-Howard. Les catégoriciens étaient très bien placés pour se saisir de ces bouleversements, car d'un certain point de vue tout était déjà là. En effet, pour un catégoricien et un structuraliste en général, un objet est l'ensemble de ses morphismes : l'objet est déterminé par l'ensemble des relations qu'il entretient avec les autres positions de l'espace. D'où la situation d'aujourd'hui où quelqu'un comme comme Bart Jacobs peut légitimement dire qu'une théorie des types c'est toujours une fibration au dessus d'une catégorie de base. "A logic is always a logic over a type theory" [Jacobs 1999].

Cependant il y a un aspect que la théorie des catégories ne capture pas, c'est que les théories des types sont des langages formels, des langages de preuves vues comme entités purement syntaxiques. Un morphisme est la trace de la preuve, mais n'est pas la preuve. Dans les théories des types on a des preuves et des preuves canoniques des procédures de réduction/réécriture, en d'autres termes un *faire*, une véritable dynamique dont la vision catégoricienne ne capte que la structure.

Enfin, notons qu'un topos c'est une théorie des types, mais que la réciproque n'est pas vraie, par exemple les extensions non-standards de la théorie des types de Martin-Löf — les espaces formels.

Pour être juste, même si dans l'ordre de la découverte elles viennent après et si elles ne capturent que la strcuture des choses, les catégories sont fort utiles ; on le sait, l'invention de la logique linéaire par exemple, vient de l'inspection de modèles catégoriques du sytème F : les espaces cohérents.

On peut généraliser ces remarques à toutes les théories structuralistes (anthropologie, sociologie, etc. . .) qui sont des étapes nécessaires mais pas suffisantes. Elles permettent de se débarrasser des naïvetés référentialistes, mais n'expliquent pas les pratiques des acteurs, *cf.* la critique du structuralisme par P. Bourdieu (il résout le problème avec la notion d'habitus).

4.2 Un thème pragmatique

J'ouvre ici une parenthèse spéculative sur le thème du pragmatisme tel que je le comprends aujourd'hui à la lumière de Wittgenstein (interprété par Bouveresse) et de Robert Brandom. On peut dire, je crois, que ce sur quoi Wittgenstein attire notre attention, c'est sur notre pratique. Il nous met en garde ou essaie de nous prévenir des maladies philosophiques qui sont en général issues d'une mauvaise compréhension de nos pratiques. En d'autres termes les problèmes philosophiques (ceux qu'il dénonce comme maladies ou faux problèmes) apparaissent lorsque nous mettons notre pratique en suspens pour nous demander comment cette pratique est possible, et que nous commençons à échafauder une théorie métaphysique qui fonderait et

expliquerait cette pratique, par exemple ce que nous faisons lorsque nous arrêtons d'utiliser un mot, pour le regarder isolément et essayer d'en trouver une signification qui en déterminerait tous les emplois. Le réalisme mathématique est exactement une illusion de ce type qui rend mystérieuse (un 6eme sens chez Gödel) notre pratique mathématique, notamment la possibilité des mathématiques appliquées, puisque la plupart de ses partisants sont émerveillés devant les applications des mathématiques (l'extraordinaire efficacité des mathématiques! Par exemple, je ne suis pas persuadé que c'est la théorie des ensembles qui envoie les fusées dans la lune.)

Je pense que jusqu'à ce jour nous ne savons pas vraiment ce qu'est le *faire* des mathématiques (bien que Martin-Löf donne une définition plausible mais restrictive, *cf.* plus bas), et que sous l'étiquette mathématiques sont rangés des *faire* différents qui demanderaient à être éclaircis.

Si j'ai avancé le nom de Robert Brandom, c'est que le pragmatisme analytique qu'il développe me semble être une des approches les plus prometteuses pour démêler l'écheveau des langages et des pratiques. Dans la perspective des fondations, la théorie des ensembles tout comme la théorie des catégories sont des entreprises analytiques classiques de réduction d'un vocabulaire à un autre. D'un certain point de vue, le programme de Hilbert est plus élaboré puisque la partie vocabulaire (l'arithmétique finitiste) s'articule à une théorie de la démonstration qui est un faire. L'approche que préconise Brandom est, après l'échec des programmes analytiques classiques, de penser l'articulation des divers vocabulaires non pas en termes de réduction mais en termes de spécification : un vocabulaire est la spécification de la pratique qui permet de déployer un autre vocabulaire (penser aux automates finis, où le vocabulaire des états et de la table de transition permet de spécifier une machine qui engendre un vocabulaire de type 2 ou 3, exemple de boostrapping pragmatique).

4.3 Imprédicativité

Un autre des motifs qui m'a fait m'éloigner de l'approche catégorique est la question de l'imprédicativité. Dès le début de mon travail de thèse, j'ai été frappé par la légèreté avec laquelle les catégoriciens prenaient le probléme de l'imprédicativité, de la facilité avec laquelle ils parlent de la catégorie des catégories (à une certaine époque en tous les cas). On ne peut pas fonder la théorie des catégories dans la théorie des catégories, quand même! cf. en 1966 Lawvere propose des axiomes pour une catégorie des catégories, voir aussi travaux sur les catégories d'ordre supérieur *weak n-categories* de Makkai.

Evidemment je force le trait en parlant de légèreté, car il faut reconnaître que les catégoriciens, Lawvere au moins, n'ont pas une conception fondationaliste des fondations mais une vue dialectique, terme qui recouvre à la fois les aspects historiques et structuralistes ; pour eux l'activité du mathématicien consiste à dégager les aspects structuraux=invariants des concepts mathématiques dans le cadre d'une catégorie, par exemple les traits invariants du concept de groupe dans le cadre de la catégorie des groupes.

Sur la question de l'imprédicativité (que certains légitiment sans plus, comme Longo dans l'article qu'il a publié dans notre revue *Mathématiques et Sciences Humaines* : la théorie de la mesure est imprédicative, donc il faut justifier l'imprédicativité) on voit à l'oeuvre la (trop) grande plasticité du formalisme. Prenons l'exemple d'un système imprédicatif comme le système F, arithmétique fonctionnelle du 2eme ordre, nombre de travaux ont essayé de trouver une sémantique dénotationnelle, des modèles, pour un tel système. Rien d'étonnant à ce que la solution vienne du côté catégorique (Rosolini *modest sets, effective topos*)!

Remarquons que cette question est comme celle de l'infini, une question de théorie de la signification. Et la situation standard est celle d'un (méta)mathématicien sûr de sa pratique

(la théorie de la mesure, par exemple) qui cherche à justifier les définitions imprédicatives par l'existence d'objets, c'est-à-dire en adoptant spontanément une théorie référentielle (l'objet derrière le signe, le *corps de signification* critiqué par Wittgenstein).

On verra que les partisants des systèmes prédicatifs comme Borel, Martin-Löf, certains intuitionnistes sont en général beaucoup plus pointilleux sur les questions de théorie de la signification.

4.4 La dureté

Sous ce titre je veux évoquer un sentiment très subjectif et très vague. Comme je l'ai déjà indiqué, la théorie des catégories est extrêmement plastique, au bout d'un moment on a le sentiment de pouvoir faire à peu près n'importe quoi, et de risquer de tomber par conséquent dans l'inconsistance (d'où le reproche d'*abstract nonsense* au début de la théorie ; d'ailleurs certains ne se privent pas de tomber dans l'inconsistance, voir les logiciens paraconsistants).

La dureté ce n'est pas la même chose que la difficulté, bien sûr la théorie des catégories est difficile et demande beaucoup d'efforts, en particulier dans nos modes de représentation des objets mathématiques, ce qui n'est pas sans intérêt, loin de là. Elle permet un saut très précieux dans l'abstraction. Cependant, en ce qui me concerne, elle ne m'a jamais transformé, elle est toujours resté une façon de parler. La vraie transformation, dans le mode de pensée, elle est venue du petit livre de Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory* édité par Giovanni Sambin [Martin-Löf 1984]. Prendre au sérieux l'isomorphisme de Curry-Howard et penser de manière conséquente un ensemble comme une proposition et une proposition comme un ensemble, c'est quelque chose dont nous n'avons pas encore tiré toutes les leçons.

4.5 Jugements et catégories

4.5.1 Un exemple : le type Sets

Un exemple de la démarche syntaxique-sémantique, caractéristique de P. Martin-Löf : le type Sets (je ne fais pas une comparaison syntaxique de systèmes, je parle de ce qu'on ne voit jamais chez les autres logiciens).

Tout d'abord Sets est un type, et pas un ensemble (on verra pourquoi). Pour le définir on doit définir 2 choses :

1. ce que c'est que d'être un ensemble (l'essence);

2. ce que c'est que l'égalité de 2 ensembles.

Dans le jargon de la théorie des types, pour pouvoir faire le jugement $\alpha : Type$, il faut définir le contenu des jugements $a : \alpha$ et $a = b : \alpha$ (le slogan quinéen "pas d'entité sans indentité" s'appuie sur un principe plus fondamental "pas d'entité sans type"). Dans *Intuitionistic Type Theory* Martin-Löf emploie d'ailleurs le mot catégorie "a category is defined by explaining what an object of the category is and when two such objects are equal" (p. 21).

Dans le cas de Sets, on définit les ensembles par une série de jugements particuliers qui sont toujours par groupe de 4 : formation, introduction, égalité, élimination (réduction). Par exemple :

- formation

$$\mathbb{N} : \mathsf{Sets}$$

- introduction (des éléments canoniques)

$$0 : \mathbb{N} \qquad\qquad \frac{a : \mathbb{N}}{\mathsf{s}a : \mathbb{N}}$$

- élimination (réduction)

$$\frac{c : \mathbb{N} \qquad d : C(0) \qquad \begin{array}{c}[x : \mathbb{N}, y : C(x)] \\ \vdots \\ e(x, y) : C(\mathsf{s}x)\end{array}}{R(c, d, (x, y)e(x, y)) : C(c)}$$

- égalité (réduction)

$$R(0, d, (x, y)e(x, y)) = d : C(0) \text{ et } R(\mathsf{s}a, d, (x, y)e(x, y)) = e(a, R(a, d, (x, y)e(x, y))) : C(\mathsf{s}a)$$

De la sorte on introduit les ensembles finis, les entiers naturels, les listes, les sommes disjointes, les sommes et produits indexés, les arbres à type de branchement finis et infinis (les fameux W-types, car tout ensemble est un type).

La remarque essentielle, pour ce qui nous préoccupe, c'est qu'à un ensemble est associée une règle de construction de ses éléments canoniques (et tout élément se réduit à un élément canonique). C'est ce qui fait de ces ensembles des ensembles constructifs et aussi ce qui fait que Sets n'est pas un ensemble, puisqu'il n'y a pas de règle de construction des ensembles.

On voit que ce qui est remarquable dans cette théorie des types, c'est que c'est une théorie des catégories au sens le plus classique du terme :

> "Given how basic the very idea of type is, it is of course unthinkable that there shouldnt be a word already in the tradition for what we here call types. You will all know that the traditional word for what I here call type is category. It was introduced by Aristotle and heavily used by Kant. I will show that the traditional use of the word coincides with the way I am using it here. What I call here the doctrine of types, the idea that an object is always an object of a certain type, really goes back to Aristotle. In his discussion of the notion of being in the philosophical dictionary, which is book Δ in the Metaphysics, he says that 'The senses of essential being are those which are indicated by the figures of predication', *τὰ σχήματα τὴς χατηγøριαζ*sq mata thc kathgorac.
>
> The word 'schema', the *σχημα* as used by Aristotle here is what most closely corresponds to 'form' as we use it. For instance, when I spoke of the forms of judgement and the forms of inference of a logical system, in both cases the word ????? is used in Greek; and the categorical schemas here are the forms of judgement. Aristotle continues, for being has as many senses as there are ways of predication, and the ways of predications are precisely the categories.
>
> What is it Aristotle wants to say in this quotation? The term being is very ambiguous or polysemic. Aristotle says that even if you just concentrate on the verb to be in its use as a copula, like when you say that S is P (or in the notation that I am using, a is an ?, a : ?), then it still has as many senses as there are ways of predication. This is to say that the judgement S is P here must not be analyzed

in this way ((S) is (P)), that is, as if one has two contents here, S and P, which each have their sense and then the copula is makes a uniform contribututio to the meaning of the whole. That is precisely what is not true. On the contrary, we must analyze it in the following way, ((S) is P). There is just open place in this judgement filled by the subject S and, depending on P here, the rest, that is, the form of judgement, has different senses for different P. We cant say what is, just is, means, but we can say what it is to be a P for an arbitrary fixed predicate or category P. Category is from the verb ??????????, which means to predicate, and also Aristotle speaks in many places of categories of being, so it is the notion of being here which is being categorized.

In Kant, particularly in the Critique of Pure Reason, the notion of category (Kategorie) has a central position, and is there synonymous with pure concept of understanding (reiner Verstandesbegriff). Instead of Verstandesbegriff he sometimes uses Verstandesform (or [Verstandes]Funktion, which is somewhat less fortunate but also less common), and sometimes Gedankenform. Form here corresponds to Aristotles scheme, ?????. And that Kants notion of category is also in tune with the notion of type as Im using it here, is clear from the fact that Kants way of arriving at his categories was simply to look at the forms of judgement of logic as it existed at his time, and to extracted his categories from them.

As you have seen, as I am using the word type or category here, it simply is a form of judgement, the form of judgement ... is an α. It is therefore completely clear that the word used in the tradition for type is category. Why then not use category, especially in a philosophical context?

The problem is that this kind of logical systems are called type theories, and if we change type into category, then we get category theory. But in the meantime Saunders MacLane had invented a certain part of algebra which is already called category theory. He thought that to take the word category from Kant and the word functor from Carnap thinking was safe, so to say, because he couldnt imagine that these philosophers had anything to offer that is still useful. But, unfortunately, we still need the notion of category in the original sense of the word. Although we have the option of using type here, surely category would have been the right word.

This was about the first part of the definition of a category, namely, the criterion of application. Now the second part, which is the criterion of identity. I have already mentioned Quines dictum, but the one who really has brought the category dependence of the notion of identity into focus is Geach, in Reference and Generality, from 1962, and in an article titled Identity, from 1967. Geach says in Reference and Generality: I maintain that it makes no sense to judge whether things are the same, or a thing remains the same, unless we add or understand some general term the same F. That in accordance with which we judge whether identity holds I call a criterion of identity. Geachs point is that, for the identity statement to make good sense, we shouldnt just say that a is the same as b, but that a is the same F as b. In the later paper, Identity, from 1967, he formulates the same idea in the following way: I am arguing for the thesis that identity is relative."(2eme lecture de Leiden, retranscrite par ? et éditée par Mark van Atten)

Un objet n'apparaît qu'en tant qu'objet d'une catégorie, et l'appartenance d'un objet à une

catégorie est une affaire de jugement. En d'autres termes la théorie des types de Martin-Löf est avant tout une théorie de jugements.

J'ai trouvé qu'il y avait là également un accord avec le concept de catégorie utilisé par les psychologues : ce qui fait la spécificité d'une catégorie au sens des théories psychologiques (la vulgate psychologique), c'est que l'appartenance d'un objet à la catégorie se fait par une opération de catégorisation qui n'est pas la satisfaction à des conditions d'appartenance explicites, par opposition à l'appartenance à un ensemble.

4.6 Ordre des concepts

Dans la démarche de Martin-Löf il y a quelque chose qui fait écho aux critiques soulevées par Fefermann contre la théorie des catégories :

> "My claim above is that the general concepts of operation and collection have logical priority with respect to structural notions (such as group, category, etc.) because the latter are defined in terms of the former and not conversely. At the same time, I believe our experience demonstrates their psychological priority. I realize that workers in category theory are so at home in their subject that they find it more natural to think in categorical rather than set-theoretical terms, but I would liken this to not needing to hear, one has learned to compose music." ([Feferman1977], p. 153)

Je ne suivrai pas Ferferman sur le terrain psychologique (bien que la question mérite d'être posée, ne serait-ce que dans une perspective pédagogique) mais cette insistance sur l'ordre des concepts est un point central dans la démarche de Martin-Löf.

> "But what I do want to remark on now is the rigid order in which the semantical explanations have to come.
>
> What we shall call this order? What comes most naturally, to me at least, is the order of conceptual priority, or conceptual order. Again, the realization that we have such a rigid order between our concepts is certainly an age old one, and the question is only how it has been called from time to time. If you look, again, in Aristotle, you see that this order is called, provteron, respectively, usteron kata; to;n lovgon. In high scholastic philosophy these were translated into, prior, respectively, posterior secundum rationem. *Ratio* here is the translation of the Greek lovgos. So, what is the lovgos that is talked about here? It is the definition of the essence of the thing. When you ask the Socratic question, What is something?, then the answer is given in language, and it is called the lovgos. The lovgos is simply the definition of the essence of a thing. So the order here, which I call the order of conceptual priority, might also be called the essential order, the Wesensordnung.
>
> I want to finish by adding an important remark about this order. The judgement a is an object of type α carries with it the presupposition that α is a type. If the judgement carries with it that presupposition, that means that one must know that α is a type prior to knowing that a is an object of that type. There is no question of talking of an object of type α unless α is a type, so the α, the type, must come before a, come before the object, in this conceptual order. As α here is the universal general concept under which a, the object a, falls, the conclusion is that

in the conceptual order the general concept, the universale, is prior to the object which falls under it. This had a succinct scholastic formulation: *the universalia ante rem principle*." (P. Martin-L"of2 lecture2 Leiden 1993, retranscrite par ? et éditée par Mark van Atten)

4.7 Mathématiques et Logique selon P. Martin-Löf

"( ) mathematics isn't defined by its content but by its method, its method, which is to say, the deductive method, the method of proving theorems : proving theorems is what mathematicians do. And that method, the deductive method, is, in its widest understanding, simply the method of acquiring knowledge through proof, the method that was consciously conceived and described already in ancient time, particularly in Aristotle's Posterior Analytics, and was revived at the beginning of the modern time by the rationalists, by Descartes and Leibniz." (P. Martin-Löf, Lecture 1 Leiden 1993 retranscrite par ? et éditée par mes soins)

"What mathematicians strive after is to prove theorems, so their products, so to say, the goods they sell, are the theorems that they prove, whereas the product of the logicians activity is not at all theorems, it's a logical system that the logician attempts at reaching, so it's the system of forms of judgement and inference rules, by the use of which you may arrive at mathematical theorems. So what the logician strives after is to give an explicit formulation of the rules that the mathematician is following in his reasoning activity. So it is something entirely different. Now, logic in this sense is as I said the theory of reasoning, or we might say theory of science here, if mathematics is widened to encompass all of demonstrative science, then logic is the theory of demonstrative science, and this is the reason why Bolzano chose to call his four-volumed logic, not Logic, as one would have expected, but Theory of Science, Wissenschaftslehre." (P. Martin-Löf, Lecture 1 Leiden 1993 retranscrite par ? et éditée par mes soins)

References

[Barthélemy 1991] Barthélemy J-P., "Similitudes, arbres, et typicalité", in Dubois D., ed., *Sémantique et cognition*, Editions du CNRS, 1991.

[Barwise, Perry 1983] Barwise, J. and Perry, J., *Situations and Attitudes*, Cambridge, Ma.: MIT Press, 1983.

[Boldini 1994] Boldini P., "Morphismes et Catégories : une lecture formelle de Piaget", *Intellectica*, Vol.19, pp. 187-216, 1994.

[Coquand, Gunter, Winskel 1989] Coquand T., Gunter C., Winskel G., 'Domains Theoretic Models of Polymorphism', *Information and Computation*, **81**, pp. 123-167, 1989.

[Ehresmann, Vanbremeersch 1987] Ehresmann A.C., Vanbrermeersch J-P., 'Hierarchical evolutive systems: a mathematical model for complex systems', *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 49, **1**, pp. 13-50, 1987.

[Feferman1977] Feferman S., 'Categorical foundations and foundations of category theory', in R. Butts and J. Hintikka, eds., *Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory*, Dordrecht: D. Reidel, pp. 149-169.)

[Henriquès 1990] Henriquès G., 'Morphismes et transformations dans la construction d'invariants', in Piaget J., *Morphismes et Catégories*, Delachaux et Niestlé, 1990, pp. 183-208.

[Jacobs 1999] Jacobs B., *Categorical Logic and Type Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 141, North Holland, Elsevier, 1999.

[Lakoff 1987] Lakoff G. *Women, Fire, and Dangerous Things*, Chicago, The University of Chicago Press , 1987.

[Lambek, Scott 1986] Lambek J., Scott P.J., *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge University Press, 1986.

[Langacker 1987] Langacker R.W., *Foundations of Cognitive Grammar, Volume I, Theoretical Prerequisites*, Stanford, Stanford University Press, 1987.

[MacNamara, Reyes 1994] M. La Palme Reyes, J. MacNamara and G. E. Reyes, "Reference, Kinds and Predicates", *The logical foundations of cognition*, J. Macnamara and G. E. Reyes (eds.) Oxford University Press, pp. 91-143, 1994.

[Macnamara, Reyes 1994] *The logical foundations of cognition*, J. Macnamara and G. E. Reyes (eds.), Oxford University Press, 1994,

[Makkai, Reyes 1977] M. Makkai, G;E. Reyes,*First Order Categorical Logic*, Springer LNM 611, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Martin-Löf 1990] Martin-Löf, P., "Mathematics of infinity", P. Martin-Löf and G. Mints (eds), *Colog 88, International Conference on Computer Logic*, Lectures Notes in Computer Science 417, Springer, 1990, 146-197.

[Martin-Löf 1984] Martin-Löf, P., *Intuitionistic type theory*, Napoli: Bibliopolis, 1984.

[Piaget 1990] Piaget J., *Morphismes et Catégories*, Delachaux et Niestlé, 1990.

[Rosch 1973] Rosch E., 'Natural categories', *Cognitive Psychology*, **4**, pp 328-350.

[Sundholm 1986] Sundholm, G., "Proof theory and meaning", Gabbay, D. and Guenthner, F.(eds.) *Handbook of Philosophical Logic, Volume III, Alternatives to Classical Logic*, D. Reidel, 1986.

[Wille 1982] Wille R., 'Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts', Rival I. (ed.), *Ordered Sets*, Reidel, Dordrecht, pp. 445-470, 1982.